# לוגיקה (1) – פתרונות תרגיל 10

.1

א. יהי $A$ מבנה ונניח ש- $A \models \forall x\varphi$, אזי מהגדרת האמת, לכל השמה $s$, $A(\varphi)[s]=T$. מן ההגדרה של שקילות לוגית $A(\psi)[s]=A(\varphi)[s]=T$, ולכן (שוב מהגדרת האמת לכמת הכולל) $A \models \forall x\psi$. באותו האופן בדיוק אם $A \models \forall x\psi$ נקבל ש- $A \models \forall x\varphi$, ולכן קיבלנו שאמנם הביטויים שקולים.

ב. תהי $L=\{c,d\}$ עבור $c,d$ קבועים אישיים. נביט בנוסחות $x\approx c,\ x\approx d$. הנוסחות $\forall x(x\approx c)\equiv\forall x(x\approx d)$ (מדוע ? באופן לא לגמרי פורמלי נוכל לומר שכל אחת משתי הנוסחות מתקיימת רק במבנים בהם יש איבר אחד ויחיד בעולם. כיצד תכתבו זאת באופן מדויק) אך הנוסחות $x\approx c,\ x\approx d$ אינן שקולות (מדוע ? הביטו במודל $A$ בן שני איברים לפחות שבו $A(c)\neq A(d)$ והביטו בהשמה $s\begin{bmatrix} x \\ A(c)\end{bmatrix}$).

ג. נביט בנוסחות $\varphi(x)=\neg(c\approx d)\wedge(x\approx c)$ ו- $\psi(x)=\neg(c\approx d)\wedge(x\approx d)$ אזי ברור $\exists x\varphi(x)\equiv\exists x\psi(x)$ (באופן לא לגמרי פורמלי, ערך האמת של שני הפסוקים במבנה $A$ כלשהו תלוי רק בערך האמת שמבנה זה נותן לפסוק $\neg(c\approx d)$) ושיש מבנים המספקים פסוקים אלה (כי יש מבנים המספקים את $\neg(c\approx d)$) אבל ברור שאם איזה מבנה $A(\varphi)[s]=T$ אז $s(x)=A(c)$ ובנוסף $A(c)\neq A(d)$ (לפי הגדרת האמת) ולכן $A(x\approx d)[s]=F$, ושוב לפי הגדרת האמת $A(\psi)[s]=F$.

.2

א. יהי $A$ מבנה כלשהו אזי

$$A(\forall x(\varphi\wedge\psi))=\min_s\{A(\varphi\wedge\psi)[s]\}=\min_s\{\min\{A(\varphi)[s],A(\psi)[s]\}\}=$$

$$\min\{\min_s\{A(\varphi)[s]\},\min_s\{A(\psi)[s]\}\}=\min\{A(\forall x\varphi),A(\forall x\psi)\}=A(\forall x\varphi\wedge\forall x\psi)$$

ב. ניתן להוכיח בדיוק כפי שעשינו בסעיף א' (ולהחליף כל *min* ב-*max* או להשתמש בדואליות.

ג. לשם נוחות הכתיבה נניח שב- $\psi$ אין משתנים חופשיים כלל (אף כי הדבר אינו משנה דבר בהוכחה). יהי $A$ מבנה כלשהו, אזי:

$A(\forall x(\varphi(x)\circ\psi))=\min_s\{t_\circ(A(\varphi)[s],A(\psi)[s])\}=\min_s\{t_\circ(A(\varphi)[s],A(\psi)\}$ עתה

נבחין שני מקרים: אם $\circ\in\{\vee,\wedge\}$ אז

$$\min_s\{t_\circ(A(\varphi)[s],A(\psi)\}=t_\circ(\min_s\{(A(\varphi)[s]\},A(\psi))=t_\circ(A(\forall x\varphi),A(\psi))=A(\forall x\varphi\circ\psi)$$

המקרה הנותר הוא $\circ=\text{"}\to\text{"}$ אזי אם $A(\psi)=T$ תמיד נכון ש- $\min_s\{t_\to(A(\varphi)[s],A(\psi))\}=T$. אם $A(\psi)=F$ אז $\min_s\{t_\to(A(\varphi)[s],A(\psi)\}=T$ אםם $A(\varphi)[s]=F$ לכל השמה $s$ אםם $\max_s\{A(\varphi)[s]\}=F$ אםם $A(\exists x\varphi)=F \Leftrightarrow A(\neg\exists x(\varphi))=T$. קיבלנו ש- $\min_s\{t_\to(A(\varphi)[s],A(\psi))\}=T$ אםם $A(\psi\vee\neg\exists x\varphi)=T$ אםם $A(\exists x\varphi\to\psi)=T$. במילים אחרות, $\forall x(\varphi\to\psi)\equiv\exists x\varphi\to\psi$.

ד. ראו סוף סעיף ג' לעיל.

.3

א. כרגיל ההוכחה היא באינדוקציה. אם $t$ קבוע אישי או משתנה אישי אזי מההנחה ש-$x$ אינו מופיע ב-$t$ ומהגדרת ההצבה נקבל $sub(t,x,t')=t$, ולכן הטענה נובעת עבור עוגן האינדוקציה. יהיו

$A$ מבנה ו-$s$ השמה כלשהם. אם $t = F(t_1,\dots t_n)$ ו-$x$ אינו מופיע ב-$t$ אז $x$ בוודאי אינו מופיע ב- $t_i$ לשום $I$, ולכן מהנחת האינדוקציה $A(sub(t_i,x,t'))[s] = A(t_i)[s]$. עתה:

$$A(t)[s] = F^A(A(t_1)[s],\dots,A(t_n)[s]) = F^A(A(sub(t_1,x,t'))[s],\dots,A(sub(t_n,x,t'))[s]) = A(sub(t,x,t'))[s]$$

כנדרש.

ב. הטענה האנלוגית עבור נוסחות היא: תהי $\varphi$ נוסחה ויהי $x$ משתנה אישי שאינו מופיע חפשי ב- $t$, אזי לכל מבנה $A$ ולכל השמה $s$, $A(sub(\varphi,x,t'))[s] = A(\varphi)[s]$. ההוכחה היא שוב באינדוקציה על היצירה, ומשתמשת בסעיף א' לעיל:

אם $\varphi$ אטומית אז

$$A(R(t_1,\dots,t_n))[s] = R^A(A(t_1)[s],\dots,A(t_n)[s]) = R^A(A(sub(t_1,x,t'))[s],\dots,A(sub(t_n,x,t'))[s]) = A(sub(\varphi,x,t'))[s]$$

(כאשר השוויון השני נובע מסעיף א', ויתר השוויונים נובעים ישירות מן ההגדרה). הוכחת הטענה עבור המקרה של קשרים פסוקיים נובעת באופן טריביאלי מהגדרת האמת. נראה עתה את הוכחת הטענה עבור הכמת הכוללף כאשר המקרה של הכמת הישי זהה (או נובע משקילויות לוגיות – לפי בחירתכם):נבחין שני מקרים – ראשית אם $\varphi = \forall u\psi$ ו- $u \neq x$:

$A(\forall u\psi)[s] = \min\{A(\psi)[s'] : s' \supset s\}$ כאשר בסימון $s' \supset s$ הכוונה היא ש- $s'$ נותנן לכל המשתנים אותו הערך כמו $s$, פרט אולי למשתנה $u$. אבל $\min\{A(\psi)[s'] : s' \supset s\} = \min\{A(sub(\psi,x,t'))[s'] : s' \supset s\}$ משום שלפי הנחת האינדוקציה, לכל מבנה ולכל השמה – בפרט לכל $s' \supset s$ - $A(\psi)[s'] = A(sub(\psi,x,t'))[s']$. יוצא $\min\{A(sub(\psi,x,t'))[s'] : s' \supset s\} = A((\forall u)sub(\psi,u,t'))[s]$ כנדרש. המקרה הנותר הוא $\varphi = \forall x\psi$ אבל במקרה זה לפי הגדרה $sub(\varphi,x,t') = \varphi$, ולכן אין מה להוכיח.

4. $rep(\varphi,\bar{x},\bar{y}) = \varphi$ עבור $\varphi$ אטומית. עבור $\varphi = \neg\psi$, $rep(\varphi,\bar{x},\bar{y}) = \neg rep(\psi,\bar{x},\bar{y})$. עבור $\varphi = \psi_1 \circ \psi_2$, $rep(\varphi,\bar{x},\bar{y}) = rep(\psi_1,\bar{x},\bar{y}) \circ rep(\psi_2,\bar{x},\bar{y})$.

א. אם $\varphi$ אטומית אין בה כמתים ובוודאי שכל דבר כשר להצבה עבור $x_i$. לפי ההגדרה $rep(\varphi.\bar{x},\bar{y}) = \varphi$, ולכן עוגן האינדוקציה נובע. ההוכחה עבור המקרים של הקשרים הפסוקיים דומה מאוד. לכן נטפל במקרה $\varphi = Qy\psi$. נבחין שני מקרים, אם $y$ אינו מבין $x_1,\dots x_n$ אז $rep(\varphi,\bar{x},\bar{y}) = (Qy)rep(\psi.\bar{x},\bar{y})$. לפי הנחת האינדוקציה $y_i$ כשר להצבה עבור $x_i$ ב- $rep(\psi,\bar{x},\bar{y})$. לכן בנוסחה $rep(\psi,\bar{x},\bar{y})$ המשתנה $x_i$ אינו מופיע חופשי בטווח של שום כמת מהצורה $Qy_i$. כיוון ש- $y_1,\dots y_n$ משתנים חדשים שאינם מופיעים ב- $\varphi$ נובע ש- $y \in \{y_1,\cdots,y_n\}$ ולכן גם ב- $rep(\varphi,\bar{x},\bar{y}) = (Qy)rep(\psi.\bar{x},\bar{y})$ $x_i$ אינו חופשי בטווח של שום כמת מהצורה $Qy_i$. כעת, אם $y = x_j$ עבור $j \neq i$ נקבל $rep(\varphi,\bar{x},\bar{y}) = (Qy_j)sub(rep(\psi,\bar{x},\bar{y}),x_j,y_j)$ ושוב לפי הנחת האינדוקציה $x_i$ אינו חופשי בטווח של שום כמת $Qy_i$ ב- $rep(\psi,\bar{x},\bar{y})$. מכאן (באינדוקציה טריביאלית) ש- $x_i$ אינו חופשי בטווח של $Qy_i$ גם ב- $sub(rep(\psi,\bar{x},\bar{y}),x_j,y_j)$ (באופן אינטואיטיבי, בהצבה הנ"ל לא שינינו את הטווח של הכמתים בנוסחה, לא שינינו את המשתנים המכומתים לא הוספנו מופעים של $x_i$ ולא שינינו את המופעים הקיימים של $x_i$ בנוסחה, ולכן הטענה נכונה). כיוון ש- $y_i \neq y_j$ גם ב- $rep(\varphi,\bar{x},\bar{y}) = (Qy_j)sub(rep(\psi,\bar{x},\bar{y}),x_j,y_j)$ המשתנה $x_i$ אינו מופיע חופשי בטווח של שום כמת $Qy_i$. נותר המקרה $y = x_i$. אך זהו מקרה טריביאלי, שכן לפי הגדרת ההצבה ב- $sub(rep(\psi,\bar{x},\bar{y}),x_i,y_i)$ אין כלל מופעים חופשיים של $x_i$ ולכן גם

ב- $rep(\varphi,\bar{x},\bar{y})=(Qy_j)sub(rep(\psi,\bar{x},\bar{y}),x_i,y_i)$ אין מופעים חופשיים של $x_i$ וממילא $y_i$ כשר להצבה עבור $x_i$ בנוסחה.

5.

א. מספר המבנים האפשריים ל-$L$ מעל עולם בעל שני איברים הוא 64: יש בסה"כ 16 אפשרויות לפרש את $r$ ו-4 אפשרויות לפרש את $f$.

ב. הפונקציה החח"ע היחידה על קבוצה בת שני איברים – מלבד הזהות - היא $F(a)=b;\ F(b)=a$. לכן כדי לבדוק אם שני מבנים (שאינם שווים) איזומורפיים יספיק האם הפונקציה $F$ הנ"ל היא איזומורפיזם.

i) $f^{B_1}=Id$ ו- $r^{B_1}=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$.

ii) $f^{B_2}=Id$ ו- $r^{B_2}=\{(a,a),(a,b),(b,a)\}$. זה אינו איזומורפי למבנה ב-א' שכן $r^{B_1}(a,a)\neq r^{b_2}(b,b)=r^{b_2}(F(a),F(a))$.

iii) $f^{B_3}=Id$ ו- $r^{B_3}=\{(a,a),(a,b)\}$. אותה נוסחה כמו ב-ב' תוכיח שאינו איזומורפי ל-$B_1$ ול- $B_2$.

iv) $f^{B_4}=Id$ ו- $r^{B_4}=\{(a,a)\}$ וכמו קודם אינו איזומורפי לקומדמים.

v) $f^{B_5}=Id$ ו- $r^{B_5}=\{\phi\}$ וכמו קודם אינו איזומורפי לקומדמים.

vi) אם נגדיר $f^{c_i}=\{(a,b),(b,a)\}$ ו- $r^{C_i}=r^{B_i}$ נקבל שאף אחד מן ה-$C_i$-ים אינו איזומורפי לאף אחד מן ה-$B_i$-ים (משום כל ה-$C_i$-ים מקיימים $f(x)\neq x$ ואף אחד מן ה-$B_i$-ים אינו מקיים זאת. כל $C_i$-ים אינם איזומורפים בזוגות בדיוק כמו ה-$B_i$-ים.

ג.

i) $f^{B_6}=Id$ ו- $r^{B_6}=\{(a,b),(b,a),(b,b)\}$ איזומורפי ל- $B_2$.

ii) $f^{B_7}=Id$ ו- $r^{B_7}=\{(b,a),(b,b)\}$ איזומורפי ל- $B_3$, ולכן לא יכלל ב-$M$.

iii) ו- $r^{B_7}=\{(b,b)\}$ איזומורפי ל- $B_4$.

ד. כיוון שיתכן רק איזומורפיזם אחד פרט לזהות, הגודל המרבי של מחלקת איזומורפיזם הוא 2.

ה. $B_1$ הוא הנציג היחיד במחלקת האיזומורפיזם של עצמו, שכן $F(B_1)\cong B_1$.

ו. מספר טיפוסי האיזומורפיזם הוא (למשל, לפי עיקרון ההכלה וההדחה) $64/2+c_1$ כאשר $c_1$ הוא מספר המחלקות האיזומורפיזם מגודל 1. המאפיין של מחלקות אלו הוא ש- $F(B)\cong B$. ברור שלכל מבנה המקיים $(\exists y\forall x)\,f(x)=y$ מחלקת שקילות מגודל 2 (מדוע), ולכן מספיק לבדוק את המבנים עבורם $f$ חח"ע, וקל לוודא שבכל אחד מן המקרים הללו יש 4 מבנים עם מחלקת איזומורפיזם מגודל 1 – 1 עם $r$ בגודל 1, 2 עם $r$ מגודל 2 ו-1 עם $r$ מגדול 0), לכן בסה"כ $c_1=8$, וקיבלנו שמספר מחלקות האיזומופריזם הוא 40.